1	2	3	4	5	TOPLAM

Adı ve Soyadı :
Numarası :
İmza :

20.05.2019

KODLAMA TEORİSİ II FİNAL SINAVI SORULARI

CEVAP ANAHTARI

1. Aşağıdaki kodlar bir devirli kod mudur? Gösteriniz.

a) $C_1 = \{(0,0,0,0),(1,1,0,0),(0,1,1,0),(1,0,0,1)\} \subseteq \mathbb{F}_2^4$ (5p)

$(1,1,0,0)+(0,1,1,0)=(1,0,1,0) \notin C_1$

olduğundan lineer kod değildir.

$\therefore$ C_1 devirli bir kod değildir.

b) $C_2 = \{(0,0,0,0),(1,1,2,2),(2,2,1,1)\} \subseteq \mathbb{F}_3^4$ (5p)

$(1,1,2,2) \in C_2 \Longrightarrow (2,1,1,2) \notin C_2$

olduğundan devirli küme değildir.

$\therefore$ C_2 devirli bir kod değildir.

c) $w(x)$, x elemanının ağırlığı olmak üzere $C_3 = \{x \in \mathbb{F}_3^{2000} : 3|w(x)\}$ (10p)

$u=(1,1,1,0,0,\dots,0) \in C_3$, $w(u)=3$

$v=(0,1,1,1,0,0,\dots,0) \in C_3$, $w(v)=3$

$u+v=x=(1,2,2,1,0,\dots,0)$, $w(x)=4$

$\therefore$ $x \notin C_3$ olduğundan lineer kod değildir.

$\therefore$ C_3 devirli bir kod değildir.

2. i) **MDS kod tanımını yapınız.** (5 p)

$d=n-k+1$ olmak üzere F sonlu cismi üzerinde tanımlı $[n,k,d]$-lineer koduna MDS kod denir.

ii) **$\mathbb{F}_2$ üzerinde tanımlı bir C kodunun üreteç matrisi** $G=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\1&0&0&0&1&0&1\\1&1&0&0&0&1&0\\0&1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}$

olsun. C kodu bir MDS kod mudur? Gösteriniz. (15 p)

v_1, v_2, v_3, v_4, G üreteç matrisinin satırları olmak üzere $\forall x \in C$ için

$$x=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\alpha_4 v_4, \quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in \mathbb{F}_2$$

şeklindedir. Bu durumda C kodu

$$C=\{(0,0,0,0,0,0,0),\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_1+v_2,\ \ldots,\ v_1+v_2+v_3+v_4\}$$

C kodunun parametreleri:

$n=7$
$k=4$
$d=3$

olup C kodu $[7,4,3]$-koddur.

$3\neq 7-4+1$ olduğundan C bir MDS kod değildir.

3. $i)$ $Q_{11} =?$ $N_{11} =?$ (5p)

$ii)$ **p tek asal sayı olmak üzere $a, b \in Q_p$ için $ab \in Q_p$ olur mu? Gösteriniz.** (7p)

$iii)$ **p tek asal sayı olmak üzere $a, b \in N_p$ için $ab \in Q_p$ olur mu? Gösteriniz.** (8p)

i) $Q_{11} = \{1, 4, 5, 9, 3\}$

$N_{11} = \{2, 8, 10, 7, 6\}$

ii) $\mathbb{F}_p^* = \langle \beta \rangle$ olsun.

$a \in Q_p \Rightarrow \exists\, i \in \mathbb{Z}_+ \ni a = \beta^{2i}$

$b \in Q_p \Rightarrow \exists\, j \in \mathbb{Z}_+ \ni b = \beta^{2j}$

$ab = \beta^{2i} \cdot \beta^{2j} = \beta^{2k}$, $k = i + j \in \mathbb{Z}$

$\therefore ab \in Q_p$

iii) $\mathbb{F}_p^* = \langle \beta \rangle$ olsun.

$a \in N_p \Rightarrow \exists\, i \in \mathbb{Z}_+ \ni a = \beta^{2i-1}$

$b \in N_p \Rightarrow \exists\, j \in \mathbb{Z}_+ \ni b = \beta^{2j-1}$

$ab = \beta^{2i-1} \cdot \beta^{2j-1} = \beta^{2m}$, $m = 2(i+j-1) \in \mathbb{Z}_+$

$\therefore ab \in Q_p$

4. $\mathbb{F}_2$ üzerinde tanımlı bir C kodunun üreteç matrisi $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $W_C(z) = ?$ $\quad W_{C^\perp}(z) = ?$ (20p)

$$C = \left\{ \begin{array}{c} 0000000 \\ 1001101 \\ 0101011 \\ 0010111 \\ 1100110 \\ 1011010 \\ 0111100 \\ 1110001 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{c} w(x) \\ \hline 0 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{array}$$

$$W_C(z) = 1 + 7z^4$$

$$W_{C^\perp}(z) = \frac{1}{8}(1+z)^7 \, W_C\left(\frac{1-z}{1+z}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(1+z)^7 \left(1 + 7\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^4\right)$$

$$= 1 + 7z^3 + 7z^4 + z^7$$

5. **$p = 11, l = 3$ olmak üzere $\beta, x^5 + 2x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ polinomunun bir kökü olsun. $x^p - 1$ polinomunu çarpanlara ayırarak kuadratik rezidü kodlarının üreteçlerini bulunuz.** (20p)

$$\mathbb{F}_3\{x\} / \langle x^5+2x+1 \rangle \qquad \mathbb{F}_{3^5}^* = \langle \beta \rangle$$

$$\mathbb{F}_3$$

$$w = \beta^{22}$$

$$x^p - 1 = (x-1)\, g_{Q_p}(x)\, g_{N_p}(x)$$

$$Q_{11} = \{1, 4, 5, 9, 3\}$$

$$N_{11} = \{2, 8, 10, 7, 6\}$$

$$g_{Q_p}(x) = (x-w)(x-w^4)(x-w^5)(x-w^9)(x-w^3)$$

$$= x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 2$$

$$g_{N_p}(x) = (x-w^2)(x-w^8)(x-w^{10})(x-w^7)(x-w^6)$$

$$= x^5 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2$$

$$x^{11} - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 2)(x^5 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2)$$

Bu durumda kuadratik rezidü kodlarının üreteçleri;

$$\pi(C_{Q_{11}}) = \langle g_{Q_{11}}(x) \rangle$$

$$\pi(\overline{C}_{Q_{11}}) = \langle (x-1)\, g_{Q_{11}}(x) \rangle$$

$$\pi(C_{N_{11}}) = \langle g_{N_{11}}(x) \rangle$$

$$\pi(\overline{C}_{N_{11}}) = \langle (x-1)\, g_{N_{11}}(x) \rangle$$